

Exámenes de Selectividad

Matemáticas II. Cataluña 2022, Convocatoria ordinaria

mentoor.es



Sèrie 2

Ejercicio 1. Análisis

Sea $f'(x) = 3x^2 - 12x$ la derivada de una función $f(x)$.

- Si sabemos que $f(x)$ corta el eje de las abscisas en $x = 1$, calcule la expresión de la función $f(x)$.
- Calcule la abscisa del punto de inflexión de $f(x)$ y estudie la concavidad de la función.
- Sabemos que el área del recinto limitado por la curva $y = f''(x)$, el eje de las abscisas y las rectas $x = 0$ y $x = a$, con $a > 2$, es $15u^2$. Calcule el valor de a .

Solución:

- Si sabemos que $f(x)$ corta el eje de las abscisas en $x = 1$, calcule la expresión de la función $f(x)$.

Para encontrar $f(x)$, integramos su derivada $f'(x)$:

$$f(x) = \int (3x^2 - 12x) dx = 3 \frac{x^3}{3} - 12 \frac{x^2}{2} + C = x^3 - 6x^2 + C.$$

Sabemos que la función corta el eje de abscisas en $x = 1$, lo que significa que el punto $(1, 0)$ pertenece a la gráfica, es decir, $f(1) = 0$.

$$f(1) = 1^3 - 6(1)^2 + C = 0 \implies 1 - 6 + C = 0 \implies -5 + C = 0 \implies C = 5.$$

La expresión de la función es $f(x) = x^3 - 6x^2 + 5$.

- Calcule la abscisa del punto de inflexión de $f(x)$ y estudie la concavidad de la función.

Para estudiar la concavidad y los puntos de inflexión, necesitamos la segunda derivada, $f''(x)$.

$$f'(x) = 3x^2 - 12x \implies f''(x) = 6x - 12.$$

Igualemos la segunda derivada a cero para encontrar los candidatos a puntos de inflexión:

$$6x - 12 = 0 \implies 6x = 12 \implies x = 2.$$

Estudiamos el signo de $f''(x)$ a ambos lados de $x = 2$:

- Intervalo $(-\infty, 2)$: Tomamos $x = 0$, $f''(0) = -12 < 0$. La función es **cóncava hacia abajo** ($\cap$).
- Intervalo $(2, +\infty)$: Tomamos $x = 3$, $f''(3) = 6(3) - 12 = 6 > 0$. La función es **cóncava hacia arriba** ($\cup$).

Como hay un cambio de concavidad en $x = 2$, en ese punto hay un punto de inflexión.

La abscisa del punto de inflexión es $x = 2$.
La función es cóncava hacia abajo en $(-\infty, 2)$ y cóncava hacia arriba en $(2, +\infty)$.

- c) Sabemos que el área del recinto limitado por la curva $y = f''(x)$, el eje de las abscisas y las rectas $x = 0$ y $x = a$, con $a > 2$, es $15u^2$. Calcule el valor de a .

El área se calcula mediante la integral definida $A = \int_0^a |f''(x)| dx = 15$. La función $f''(x) = 6x - 12$ es negativa en $(0, 2)$ y positiva en $(2, a)$ ya que $a > 2$. Por lo tanto, debemos separar la integral en dos partes:

$$A = \int_0^2 -(6x - 12) dx + \int_2^a (6x - 12) dx = 15.$$

$$\int_0^2 (12 - 6x) dx + \int_2^a (6x - 12) dx = 15.$$

Calculamos las integrales:

$$[12x - 3x^2]_0^2 + [3x^2 - 12x]_2^a = 15.$$

$$((24 - 12) - 0) + ((3a^2 - 12a) - (12 - 24)) = 15.$$

$$12 + 3a^2 - 12a - (-12) = 15.$$

$$12 + 3a^2 - 12a + 12 = 15.$$

$$3a^2 - 12a + 24 = 15 \implies 3a^2 - 12a + 9 = 0 \implies a^2 - 4a + 3 = 0.$$

Resolvemos la ecuación: $a = \frac{4 \pm \sqrt{16 - 12}}{2} = \frac{4 \pm 2}{2}$. Las soluciones son $a = 3$ y $a = 1$. Como el enunciado especifica que $a > 2$, la única solución válida es $a = 3$.

El valor de a es 3.

Ejercicio 2. Álgebra

Considere el sistema de ecuaciones lineales siguiente, que depende del parámetro real a :

$$\begin{cases} ax + 2y + 3z = 2 \\ 2x + ay + z = a \\ x + y + 4z = 1 \end{cases}$$

- Discuta el sistema para los diferentes valores del parámetro a .
- Resuelva, si es posible, el sistema para el caso $a = 2$.

Solución:

- Discuta el sistema para los diferentes valores del parámetro a .

Aplicamos el Teorema de Rouché-Frobenius. Sea A la matriz de coeficientes.

$$A = \begin{pmatrix} a & 2 & 3 \\ 2 & a & 1 \\ 1 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

Calculamos su determinante:

$$\begin{aligned} |A| &= a(4a - 1) - 2(8 - 1) + 3(2 - a) \\ &= 4a^2 - a - 14 + 6 - 3a \\ &= 4a^2 - 4a - 8 = 4(a^2 - a - 2) \end{aligned}$$

Igualemos a cero: $a^2 - a - 2 = 0 \implies a = \frac{1 \pm \sqrt{1 - 4(-2)}}{2} = \frac{1 \pm 3}{2}$. Las raíces son $a = 2$ y $a = -1$.

Caso 1: $a \neq 2$ y $a \neq -1$ $|A| \neq 0 \implies \text{Rg}(A) = 3$. El sistema es **Compatible Determinado (S.C.D.)**.

Caso 2: $a = 2$

$$(A|A^*) = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 2 & 3 & 2 \\ 2 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 4 & 1 \end{array} \right)$$

$\text{Rg}(A) < 3$. El menor $\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 2 - 6 = -4 \neq 0 \implies \text{Rg}(A) = 2$. Para $\text{Rg}(A^*)$, el menor formado

por C_2, C_3, C_4 es $\begin{vmatrix} 2 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 4 & 1 \end{vmatrix} = 0$. El menor C_1, C_3, C_4 es $\begin{vmatrix} 2 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 4 & 1 \end{vmatrix} = 0$. Como $C_1 = C_4$, $\text{Rg}(A^*) = 2$.

$\text{Rg}(A) = \text{Rg}(A^*) = 2 < 3$. El sistema es **Compatible Indeterminado (S.C.I.)**.

Caso 3: $a = -1$

$$(A|A^*) = \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 2 & 3 & 2 \\ 2 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 4 & 1 \end{array} \right)$$

$\text{Rg}(A) = 2$. Para $\text{Rg}(A^*)$, el menor C_1, C_2, C_4 es $\begin{vmatrix} -1 & 2 & 2 \\ 2 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$. $\text{Rg}(A) = \text{Rg}(A^*) = 2 < 3$. El sistema es **Compatible Indeterminado (S.C.I.)**.

Si $a \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 2\} \implies \text{S.C.D.}$
Si $a = -1$ o $a = 2 \implies \text{S.C.I.}$

b) Resuelva, si es posible, el sistema para el caso $a = 2$.

Para $a = 2$, es un S.C.I. Las ecuaciones son:

$$\begin{cases} 2x + 2y + 3z = 2 \\ 2x + 2y + z = 2 \\ x + y + 4z = 1 \end{cases}$$

Restando la segunda ecuación de la primera: $2z = 0 \implies z = 0$. Sustituyendo $z = 0$ en el sistema:

$$\begin{cases} 2x + 2y = 2 \\ 2x + 2y = 2 \\ x + y = 1 \end{cases}$$

Las tres ecuaciones se reducen a una: $x + y = 1$. Hacemos $y = \lambda$. Entonces $x = 1 - \lambda$.

La solución para $a = 2$ es $\begin{cases} x = 1 - \lambda \\ y = \lambda \\ z = 0 \end{cases} \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}.$

Ejercicio 3. Geometría

Sea la recta r definida por la expresión siguiente:

$$r : \begin{cases} x = 2 + \lambda \\ y = -1 + 3\lambda \\ z = 3 + \lambda \end{cases}$$

- Determine la posición relativa de la recta r respecto al plano $\pi : x - 2y + 4z - 4 = 0$. Si es paralela, calcule la distancia de r a π , y si es secante, calcule el punto de corte.
- Calcule la ecuación de la recta s perpendicular al plano π y que talla la recta r en un punto P , la primera coordenada del cual es 5 veces más grande que la segunda.

Solución:

- Determine la posición relativa de la recta r respecto al plano $\pi : x - 2y + 4z - 4 = 0$. Si es paralela, calcule la distancia de r a π , y si es secante, calcule el punto de corte.

Sustituimos las ecuaciones paramétricas de la recta r en la ecuación del plano π :

$$(2 + \lambda) - 2(-1 + 3\lambda) + 4(3 + \lambda) - 4 = 0$$

$$2 + \lambda + 2 - 6\lambda + 12 + 4\lambda - 4 = 0$$

$$(1 - 6 + 4)\lambda + (2 + 2 + 12 - 4) = 0$$

$$-\lambda + 12 = 0 \implies \lambda = 12.$$

Como existe un único valor de λ , la recta y el plano son **secantes**.

Calculamos el punto de corte sustituyendo $\lambda = 12$ en las ecuaciones de la recta:

$$P_{\text{corte}} = (2 + 12, -1 + 3(12), 3 + 12) = (14, 35, 15).$$

La recta y el plano son secantes. El punto de corte es $(14, 35, 15)$.

- Calcule la ecuación de la recta s perpendicular al plano π y que talla la recta r en un punto P , la primera coordenada del cual es 5 veces más grande que la segunda.

Primero, encontramos el punto P de la recta r que cumple $x_P = 5y_P$.

$$2 + \lambda = 5(-1 + 3\lambda) \implies 2 + \lambda = -5 + 15\lambda \implies 7 = 14\lambda \implies \lambda = 1/2.$$

Las coordenadas del punto P son:

$$P = (2 + 1/2, -1 + 3/2, 3 + 1/2) = (5/2, 1/2, 7/2).$$

La recta s es perpendicular al plano π , por lo tanto, su vector director $\vec{v}_s$ es el vector normal del plano, $\vec{n}_\pi = (1, -2, 4)$. La recta s pasa por el punto P . Su ecuación es:

$$s : \begin{cases} x = 5/2 + \mu \\ y = 1/2 - 2\mu \\ z = 7/2 + 4\mu \end{cases}$$

La ecuación de la recta s es $\begin{cases} x = 5/2 + \mu \\ y = 1/2 - 2\mu \\ z = 7/2 + 4\mu \end{cases}$.



Ejercicio 4. Análisis

- a) Encuentre una función polinómica $y = g(x)$ de grado 3 tal que corte el eje de las ordenadas en el punto $(0, 5)$, que la recta tangente a $y = g(x)$ en el punto de abscisa $x = 1$ sea horizontal y que $g''(x) = 2x + 1$.
- b) Compruebe que la función $f(x) = -x^3 + 6x^2 - 16$ tiene una raíz en $x = 2$ y que es estrictamente creciente en el intervalo $(0, 4)$. Utilice esta información para calcular el área determinada por la función $f(x)$, el eje de las abscisas y las rectas $x = 0$ y $x = 4$.

Solución:

- a) Encuentre una función polinómica $y = g(x)$ de grado 3 tal que corte el eje de las ordenadas en el punto $(0, 5)$, que la recta tangente a $y = g(x)$ en el punto de abscisa $x = 1$ sea horizontal y que $g''(x) = 2x + 1$.

Partimos de $g''(x) = 2x + 1$. Integramos para encontrar $g'(x)$:

$$g'(x) = \int (2x + 1)dx = x^2 + x + C_1.$$

La tangente en $x = 1$ es horizontal, lo que significa que $g'(1) = 0$:

$$g'(1) = 1^2 + 1 + C_1 = 0 \implies 2 + C_1 = 0 \implies C_1 = -2.$$

Así, $g'(x) = x^2 + x - 2$.

Integramos de nuevo para encontrar $g(x)$:

$$g(x) = \int (x^2 + x - 2)dx = \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} - 2x + C_2.$$

La función corta el eje de ordenadas en $(0, 5)$, lo que significa que $g(0) = 5$:

$$g(0) = 0 + 0 - 0 + C_2 = 5 \implies C_2 = 5.$$

La función es $g(x) = \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} - 2x + 5$.

- b) Compruebe que la función $f(x) = -x^3 + 6x^2 - 16$ tiene una raíz en $x = 2$ y que es estrictamente creciente en el intervalo $(0, 4)$. Utilice esta información para calcular el área...

Comprobamos si $x = 2$ es raíz: $f(2) = -2^3 + 6(2^2) - 16 = -8 + 24 - 16 = 0$. Sí, es raíz.

Estudiamos el crecimiento con la primera derivada: $f'(x) = -3x^2 + 12x = -3x(x - 4)$.

Los puntos críticos son $x = 0$ y $x = 4$. En el intervalo $(0, 4)$, tomamos un punto de prueba, ej. $x = 1$: $f'(1) = -3(1)(1 - 4) = 9 > 0$. Como $f'(x) > 0$ en $(0, 4)$, la función es estrictamente creciente en ese intervalo.

Para calcular el área, debemos ver dónde la función es positiva y negativa. Como $x = 2$ es una raíz y la función es creciente, sabemos que $f(x) < 0$ en $(0, 2)$ y $f(x) > 0$ en $(2, 4)$.

$$A = \int_0^4 |f(x)|dx = \int_0^2 -(-x^3 + 6x^2 - 16)dx + \int_2^4 (-x^3 + 6x^2 - 16)dx.$$



$$A = \int_0^2 (x^3 - 6x^2 + 16)dx + \int_2^4 (-x^3 + 6x^2 - 16)dx.$$

Calculamos la primitiva: $F(x) = \frac{x^4}{4} - 2x^3 + 16x$.

$$A = [F(x)]_0^2 - [F(x)]_2^4 = (F(2) - F(0)) - (F(4) - F(2)) = 2F(2) - F(0) - F(4).$$

$$F(0) = 0.$$

$$F(2) = \frac{16}{4} - 2(8) + 16(2) = 4 - 16 + 32 = 20.$$

$$F(4) = \frac{256}{4} - 2(64) + 16(4) = 64 - 128 + 64 = 0.$$

$$A = 2(20) - 0 - 0 = 40.$$

El área es de 40 u ² .

Ejercicio 5. Álgebra

Sea la matriz $X = \begin{pmatrix} a & 1 & 0 \\ 0 & b & 1 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}$, que depende de los parámetros a , b y c .

- a) Calcule las matrices X tales que $X^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.
- b) Determine los valores de a , b y c para que la matriz inversa de X sea

$$X^{-1} = \begin{pmatrix} 1/2 & -1/2 & -1/2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Solución:

- a) Calcule las matrices X tales que $X^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Calculamos X^2 :

$$X^2 = \begin{pmatrix} a & 1 & 0 \\ 0 & b & 1 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & 1 & 0 \\ 0 & b & 1 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2 & a+b & 1 \\ 0 & b^2 & b+c \\ 0 & 0 & c^2 \end{pmatrix}.$$

Igualemos esta matriz a la dada:

$$\begin{pmatrix} a^2 & a+b & 1 \\ 0 & b^2 & b+c \\ 0 & 0 & c^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Igualemos elemento a elemento:

- $a^2 = 1 \implies a = \pm 1$.
- $b^2 = 1 \implies b = \pm 1$.
- $c^2 = 1 \implies c = \pm 1$.
- $a + b = 0 \implies b = -a$.
- $b + c = 0 \implies c = -b$.

De $b = -a$ y $c = -b$, se deduce $c = a$.

Si $a = 1$, entonces $b = -1$ y $c = 1$.

Si $a = -1$, entonces $b = 1$ y $c = -1$.

Hay dos matrices solución.

Las matrices son $X_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ y $X_2 = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

- b) Determine los valores de a , b y c para que la matriz inversa de X sea

$$X^{-1} = \begin{pmatrix} 1/2 & -1/2 & -1/2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Si A es la inversa de X , entonces X es la inversa de A . Calculamos la inversa de la matriz dada.

Sea $A = \begin{pmatrix} 1/2 & -1/2 & -1/2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$. Su determinante es $|A| = (1/2)(1)(-1) = -1/2$.

Calculamos $A^{-1} = X$ por adjuntos.

$$\text{Adj}(A)^t = \begin{pmatrix} -1 & -1/2 & 0 \\ 0 & -1/2 & -1/2 \\ 0 & 0 & 1/2 \end{pmatrix}$$
$$X = A^{-1} = \frac{1}{-1/2} \text{Adj}(A)^t = -2 \begin{pmatrix} -1 & -1/2 & 0 \\ 0 & -1/2 & -1/2 \\ 0 & 0 & 1/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

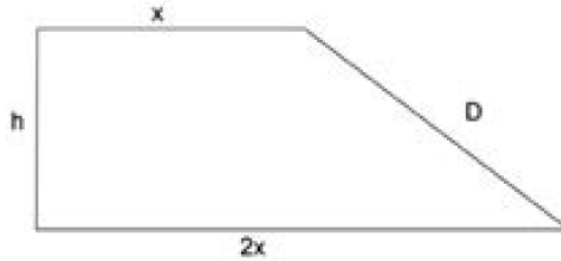
Comparando esta matriz con la forma de $X = \begin{pmatrix} a & 1 & 0 \\ 0 & b & 1 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}$, obtenemos los valores: $a = 2, b = 1, c = -1$.

Los valores son $a = 2, b = 1, c = -1$.

Ejercicio 6. Análisis

En el patio de una escuela se quiere crear un área de juego de $30m^2$ para los más pequeños en forma de trapezio rectangular, de manera que la base más grande mida el doble que la base más pequeña, tal como muestra la figura, y que el lado oblicuo respecto a las bases (D) sea tan corto como sea posible.

- a) Justifique que se satisfacen las relaciones siguientes: $h = \frac{20}{x}$; $D(x) = \sqrt{\frac{400}{x^2} + x^2}$.
 b) Encuentre las dimensiones del trapezio para las cuales la longitud del lado D es mínima.



Solución:

- a) Justifique que se satisfacen las relaciones siguientes: $h = \frac{20}{x}$; $D(x) = \sqrt{\frac{400}{x^2} + x^2}$.

El área de un trapecio es $A = \frac{(B+b)h}{2}$.

Según la figura y el enunciado, $B = 2x$, $b = x$ y $A = 30$.

$$30 = \frac{(2x + x)h}{2} = \frac{3xh}{2}.$$

Despejamos la altura h : $60 = 3xh \implies h = \frac{60}{3x} = \frac{20}{x}$. Queda justificada la primera relación.

El lado oblicuo D es la hipotenusa de un triángulo rectángulo de altura h y base igual a la diferencia de las bases del trapecio, $2x - x = x$.

Por el Teorema de Pitágoras: $D^2 = h^2 + x^2$.

Sustituimos la expresión de h que acabamos de encontrar:

$$D^2 = \left(\frac{20}{x}\right)^2 + x^2 = \frac{400}{x^2} + x^2.$$

Por tanto, $D(x) = \sqrt{\frac{400}{x^2} + x^2}$. Queda justificada la segunda relación.

Las relaciones quedan justificadas a partir del área del trapecio y el Teorema de Pitágoras.

- b) Encuentre las dimensiones del trapecio para las cuales la longitud del lado D es mínima.

Minimizar $D(x)$ es equivalente a minimizar la función dentro de la raíz cuadrada, $f(x) = D(x)^2 = \frac{400}{x^2} + x^2$.

Derivamos $f(x)$ e igualamos a cero:

$$f(x) = 400x^{-2} + x^2 \implies f'(x) = -800x^{-3} + 2x = -\frac{800}{x^3} + 2x.$$

$$-\frac{800}{x^3} + 2x = 0 \implies 2x = \frac{800}{x^3} \implies 2x^4 = 800 \implies x^4 = 400.$$

$$x = \sqrt[4]{400} = \sqrt[4]{20^2} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}.$$

La segunda derivada, $f''(x) = 2400x^{-4} + 2$, es siempre positiva, así que es un mínimo.

Las dimensiones son:

Base pequeña: $x = 2\sqrt{5}$ m.

Base grande: $2x = 4\sqrt{5}$ m.

Altura: $h = \frac{20}{x} = \frac{20}{2\sqrt{5}} = \frac{10}{\sqrt{5}} = 2\sqrt{5}$ m.

Dimensiones: Base pequeña $2\sqrt{5}$ m, base grande $4\sqrt{5}$ m y altura $2\sqrt{5}$ m.

Sèrie

Ejercicio 1. Álgebra

Sean las matrices $C = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ y $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$.

- Compruebe que $C^3 = I_2$, en que I_2 es la matriz identidad de orden 2, y deduzca que la matriz C es invertible y que $C^{-1} = C^2$. Calcule C^{2022} .
- Resuelva la ecuación matricial $C \cdot X = A - 2I_2$.

Solución:

- Compruebe que $C^3 = I_2$, en que I_2 es la matriz identidad de orden 2, y deduzca que la matriz C es invertible y que $C^{-1} = C^2$. Calcule C^{2022} .

$$C^2 = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}. \quad C^3 = C^2 \cdot C = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I_2. \text{ Queda comprobado.}$$

De la relación $C \cdot C^2 = I_2$, por definición de matriz inversa, la inversa de C es C^2 . Que exista inversa significa que C es invertible.

Para calcular C^{2022} , usamos la propiedad cíclica. Dividimos 2022 entre 3: $2022 = 3 \times 674 + 0$. El resto es 0. $C^{2022} = C^{3 \cdot 674} = (C^3)^{674} = (I_2)^{674} = I_2$.

Queda demostrado que $C^3 = I_2$, de lo que se deduce $C^{-1} = C^2$. Además, $C^{2022} = I_2$.

- Resuelva la ecuación matricial $C \cdot X = A - 2I_2$.

$C \cdot X = A - 2I_2$. Multiplicamos por la izquierda por C^{-1} : $X = C^{-1}(A - 2I_2) = C^2(A - 2I_2)$.

$$A - 2I_2 = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 3 & -3 \end{pmatrix}. \quad X = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 3 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 3 \\ -3 & 3 \end{pmatrix}.$$

$$X = \begin{pmatrix} -3 & 3 \\ -3 & 3 \end{pmatrix}.$$

Ejercicio 2. Análisis

Considere la función $f(x) = x^3$ y sea a un nombre real estrictamente positivo.

- Calcule la ecuación de la recta t tangente a la gráfica de la función f en el punto de abscisa $x = a$. Encuentre el punto de corte de la recta t con el eje de las abscisas (en función de a).
- Haga un esbozo de la gráfica de la función f y la recta t . Calcule el valor de a para que el área en el primer cuadrante limitada por la función f , la recta t y el eje de las abscisas sea $108u^2$.

Solución:

- Calcule la ecuación de la recta t tangente a la gráfica de la función f en el punto de abscisa $x = a$. Encuentre el punto de corte de la recta t con el eje de las abscisas (en función de a).

Ecuación de la tangente: $y - f(a) = f'(a)(x - a)$.

$$f(a) = a^3. \quad f'(x) = 3x^2 \implies f'(a) = 3a^2.$$

$$y - a^3 = 3a^2(x - a) \implies y = 3a^2x - 3a^3 + a^3 \implies y = 3a^2x - 2a^3.$$

Corte con el eje de abscisas ($y=0$):

$$0 = 3a^2x - 2a^3 \implies 3a^2x = 2a^3. \text{ Como } a > 0, \text{ podemos dividir por } 3a^2: x = \frac{2a}{3}.$$

El punto de corte es $(2a/3, 0)$.

Recta tangente: $y = 3a^2x - 2a^3$. Punto de corte con OX: $(\frac{2a}{3}, 0)$.

- Haga un esbozo de la gráfica de la función f y la recta t . Calcule el valor de a para que el área en el primer cuadrante limitada por la función f , la recta t y el eje de las abscisas sea $108u^2$.

El área pedida es el área bajo la curva $y = x^3$ desde $x = 0$ hasta $x = a$, menos el área del triángulo formado por la recta tangente y el eje OX desde su punto de corte $x = 2a/3$ hasta $x = a$.

Área total = (Área bajo x^3 de 0 a a) - (Área bajo la tangente de $2a/3$ a a).

$$A_{\text{curva}} = \int_0^a x^3 dx = \left[\frac{x^4}{4}\right]_0^a = \frac{a^4}{4}.$$

$$A_{\text{triangulo}} = \int_{2a/3}^a (3a^2x - 2a^3) dx = \left[\frac{3a^2x^2}{2} - 2a^3x\right]_{2a/3}^a = \left(\frac{3a^4}{2} - 2a^4\right) - \left(\frac{3a^2}{2}\left(\frac{4a^2}{9}\right) - 2a^3\left(\frac{2a}{3}\right)\right) = -\frac{a^4}{2} - \left(\frac{2a^4}{3} - \frac{4a^4}{3}\right) = -\frac{a^4}{2} + \frac{2a^4}{3} = \frac{a^4}{6}.$$

$$\text{Área total} = \frac{a^4}{4} - \frac{a^4}{6} = \frac{3a^4 - 2a^4}{12} = \frac{a^4}{12}.$$

$$\frac{a^4}{12} = 108 \implies a^4 = 108 \cdot 12 = 1296. \quad a = \sqrt[4]{1296} = 6. \text{ Como } a > 0, \text{ la solución es válida.}$$

El valor es $a = 6$.



Ejercicio 3. Álgebra

Considere el sistema de ecuaciones lineales

$$\begin{cases} 2x - y + 3z = 0 \\ my + (3 - m)z = -6 \\ 2x - y + mz = 6 \end{cases}$$

en que m es un parámetro real.

- Discuta el sistema para los diferentes valores del parámetro m .
- Resuelva el sistema, si es posible, cuando $m = 0$ y cuando $m = 3$. En cada caso, dé la posición relativa de los tres planos en $\mathbb{R}^3$.

Solución:

- Discuta el sistema para los diferentes valores del parámetro m .

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 0 & m & 3 - m \\ 2 & -1 & m \end{pmatrix}.$$

$$|A| = 2(m^2 - (-1)(3 - m)) - 0 + 2((-1)(3 - m) - 3m) = 2(m^2 + 3 - m) + 2(-3 + m - 3m) = 2m^2 + 6 - 2m - 6 - 4m = 2m^2 - 6m = 2m(m - 3).$$

$$|A| = 0 \text{ si } m = 0 \text{ o } m = 3.$$

Caso 1: $m \neq 0, 3 \implies |A| \neq 0 \implies \text{Rg}(A) = 3$. **S.C.D.**

$$\text{Caso 2: } m = 0 \implies (A|A^*) = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & -6 \\ 2 & -1 & 0 & 6 \end{array} \right). \text{Rg}(A) = 2. \text{Rg}(A^*) = 2. \text{S.C.I.}$$

$$\text{Caso 3: } m = 3 \implies (A|A^*) = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 3 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & -6 \\ 2 & -1 & 3 & 6 \end{array} \right).$$

La primera y tercera ecuación son $2x - y + 3z = 0$ y $2x - y + 3z = 6$. Contradicción. **S.I.**

Si $m \in \mathbb{R} \setminus \{0, 3\} \implies \text{S.C.D.}$

Si $m = 0 \implies \text{S.C.I.}$

Si $m = 3 \implies \text{S.I.}$

- Resuelva el sistema, si es posible, cuando $m = 0$ y cuando $m = 3$. En cada caso, dé la posición relativa de los tres planos en $\mathbb{R}^3$.

Caso $m=0$: S.C.I.

$$\begin{cases} 2x - y + 3z = 0 \\ 3z = -6 \\ 2x - y = 6 \end{cases} \quad . \text{ De la segunda, } z = -2.$$

Sustituyendo en la primera: $2x - y - 6 = 0 \implies 2x - y = 6$. La primera y tercera son la misma.

Hacemos $x = \lambda$. Entonces $y = 2\lambda - 6$.

Solución: $(\lambda, 2\lambda - 6, -2)$. Los tres planos se cortan en una recta.

Caso $m=3$: S.I.



No hay solución. Los planos 1 y 3 son paralelos ($2x - y + 3z = 0$ y $2x - y + 3z = 6$) y el segundo plano es secante a ambos.

m=0: Solución $(\lambda, 2\lambda - 6, -2)$. Los planos se cortan en una recta. m=3: Sin solución. Dos planos son paralelos y el tercero los corta.

Ejercicio 4. Análisis

- a) En $\mathbb{R}^2$, considere los triángulos rectángulos que tienen los vértices en los puntos $O = (0, 0)$, $A = (x, 0)$ y $B = (0, y)$, con $x > 0$ y $y > 0$, y en que la suma de los catetos es 10. Exprese el área del triángulo AOB en función de x . ¿Para qué valor de x el área del triángulo AOB es la más grande posible? ¿Qué valor tiene esta área máxima?
- b) Exprese la hipotenusa del triángulo AOB en función de x . ¿Para qué valor de x la hipotenusa del triángulo AOB es la más pequeña posible? ¿Cuál es este valor mínimo?

Solución:

- a) En $\mathbb{R}^2$, considere los triángulos rectángulos que tienen los vértices en los puntos $O = (0, 0)$, $A = (x, 0)$ y $B = (0, y)$, con $x > 0$ y $y > 0$, y en que la suma de los catetos es 10. Exprese el área del triángulo AOB en función de x . ¿Para qué valor de x el área del triángulo AOB es la más grande posible? ¿Qué valor tiene esta área máxima?

La suma de los catetos es $x + y = 10$, por tanto $y = 10 - x$. El dominio de x es $(0, 10)$.

El área del triángulo es $A = \frac{1}{2} \cdot \text{base} \cdot \text{altura} = \frac{1}{2}xy$.

En función de x : $A(x) = \frac{1}{2}x(10 - x) = 5x - \frac{x^2}{2}$.

Para maximizar el área, derivamos e igualamos a cero:

$$A'(x) = 5 - x.$$

$$A'(x) = 0 \implies x = 5.$$

La segunda derivada es $A''(x) = -1 < 0$, por tanto es un máximo.

Para $x = 5$, el área máxima es $A(5) = 5(5) - \frac{5^2}{2} = 25 - 12.5 = 12.5$.

Área: $A(x) = 5x - \frac{x^2}{2}$. Es máxima para $x = 5$, con un valor de $12.5u^2$.

- b) Exprese la hipotenusa del triángulo AOB en función de x . ¿Para qué valor de x la hipotenusa del triángulo AOB es la más pequeña posible? ¿Cuál es este valor mínimo?

La hipotenusa H viene dada por el Teorema de Pitágoras: $H^2 = x^2 + y^2$.

$$H(x) = \sqrt{x^2 + (10 - x)^2} = \sqrt{x^2 + 100 - 20x + x^2} = \sqrt{2x^2 - 20x + 100}.$$

Para minimizar $H(x)$, minimizamos la función del interior de la raíz, $f(x) = 2x^2 - 20x + 100$.

$$f'(x) = 4x - 20.$$

$$f'(x) = 0 \implies x = 5.$$

La segunda derivada es $f''(x) = 4 > 0$, por tanto es un mínimo.

El valor mínimo de la hipotenusa para $x = 5$ es:

$$H(5) = \sqrt{2(5^2) - 20(5) + 100} = \sqrt{50 - 100 + 100} = \sqrt{50} = 5\sqrt{2}.$$

Hipotenusa: $H(x) = \sqrt{2x^2 - 20x + 100}$. Es mínima para $x = 5$, con un valor de $5\sqrt{2}$.



Ejercicio 5. Geometría

Sean los puntos $A = (0, 0, 1)$, $B = (1, 1, 1)$, $C = (-1, -1, 1)$ y $D = (1, 0, 1)$.

- Compruebe que tres de estos puntos están alineados. Determine cuáles son los tres puntos y calcule la ecuación continua y la ecuación paramétrica de la recta que definen.
- Calcule la ecuación general o cartesiana del plano que determinan los cuatro puntos.

Solución:

- Compruebe que tres de estos puntos están alineados. Determine cuáles son los tres puntos y calcule la ecuación continua y la ecuación paramétrica de la recta que definen.

Para comprobar si tres puntos están alineados, por ejemplo A, B y C, vemos si los vectores $\vec{AB}$ y $\vec{AC}$ son proporcionales.

$$\vec{AB} = B - A = (1, 1, 0)$$

$$\vec{AC} = C - A = (-1, -1, 0)$$

Observamos que $\vec{AC} = -1 \cdot \vec{AB}$. Como los vectores son proporcionales, los puntos **A, B y C están alineados**.

La recta, r , que los contiene pasa por el punto $A(0, 0, 1)$ y tiene como vector director $\vec{v}_r = \vec{AB} = (1, 1, 0)$.

– **Ecuación paramétrica:**

$$r \equiv \begin{cases} x = \lambda \\ y = \lambda \\ z = 1 \end{cases}$$

– **Ecuación continua:**

$$\frac{x-0}{1} = \frac{y-0}{1} = \frac{z-1}{0}$$

Nota: La forma $\frac{z-1}{0}$ indica que el vector director tiene componente z nula, lo que implica $z-1=0$.

Los puntos alineados son **A, B y C**.

E. Paramétrica: $(x, y, z) = (\lambda, \lambda, 1)$. **E. Continua:** $x = y, z = 1$.

- Calcule la ecuación general o cartesiana del plano que determinan los cuatro puntos.

Para que los cuatro puntos determinen un único plano, el cuarto punto D no debe pertenecer a la recta r que contiene a A, B y C.

Comprobamos si $D(1, 0, 1)$ está en r : $1 = 0, z = 1$. La coordenada y no cumple. Por lo tanto, D no está en la recta.

El plano π está determinado por el punto A, el vector director de la recta $\vec{AB}$, y el vector $\vec{AD}$.

$$\vec{AD} = D - A = (1, 0, 0)$$

La ecuación del plano es:

$$\pi \equiv \begin{vmatrix} x-0 & y-0 & z-1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0$$



$$x(0) - y(0) + (z - 1)(0 - 1) = 0$$

$$-(z - 1) = 0 \implies z - 1 = 0 \implies z = 1.$$

La ecuación del plano es $z = 1$.

Ejercicio 6. Anàlisis

La columna de la izquierda de la tabla siguiente muestra el esquema de un programa informàtico que se ha elaborado para encontrar soluciones aproximadas de una equaci3n $f(x) = 0$ en un intervalo (a, b) , sabiendo que $f(a) \cdot f(b) < 0$

- Explique por qu3 este programa es capaz de encontrar una soluci3n aproximada de la ecuaci3n $x + \ln(x) = 0$ entre los valores $a = 0,5$ y $b = 2$.
- Queremos aplicar este programa para encontrar las tres ra3ces de $f(x) = x^3 - 3x^2 + 1$ con valores de a y b diferentes. Encuentre justificadamente entre qu3 valores a y b , para cada ra3z, hemos de aplicar el programa para encontrar aproximaciones de cada una de las tres ra3ces de la funci3n.

Esquema del programa	Exemple																														
1. Escriure «Introduïu un valor a »	L'usuari introdueix $a = 0,5$																														
2. Escriure «Introduïu un valor b »	L'usuari introdueix $b = 2$																														
3. Escriure «Introduïu una funció $f(x)$ »	L'usuari introdueix $f(x) = x + \ln(x)$																														
4. Calcular $c = (a + b)/2$	El programa calcula la mitjana entre a i b i li assigna el nom $c = (0,5 + 2)/2 = 1,25$																														
5. Si $f(a) \cdot f(c) < 0$, aleshores reassignar $b = c$; en cas contrari, reassignar $a = c$	El programa comprova que $f(0,5) \cdot f(1,25) = (0,5 + \ln(0,5)) \cdot (1,25 + \ln(1,25)) < 0$; per tant, reassigna $b = 1,25$																														
6. Repetir els passos 4 i 5 tants cops com faci falta fins que $f(a) - f(b) < 0,00000001$	El programa va repetint la comprovació anterior, canviant cada vegada els valors de a o de b: <table><thead><tr><th></th><th>a</th><th>b</th></tr></thead><tbody><tr><td>inici</td><td>0,5</td><td>2</td></tr><tr><td>iteració 1</td><td>0,5</td><td>1,25</td></tr><tr><td>iteració 2</td><td>0,5</td><td>0,875</td></tr><tr><td>iteració 3</td><td>0,5</td><td>0,6875</td></tr><tr><td>iteració 4</td><td>0,5</td><td>0,59375</td></tr><tr><td>iteració 5</td><td>0,546875</td><td>0,59375</td></tr><tr><td>iteració 6</td><td>0,546875</td><td>0,5703125</td></tr><tr><td>iteració 7</td><td>0,55859375</td><td>0,5703125</td></tr><tr><td>[...]</td><td></td><td></td></tr></tbody></table>		a	b	inici	0,5	2	iteració 1	0,5	1,25	iteració 2	0,5	0,875	iteració 3	0,5	0,6875	iteració 4	0,5	0,59375	iteració 5	0,546875	0,59375	iteració 6	0,546875	0,5703125	iteració 7	0,55859375	0,5703125	[...]		
	a	b																													
inici	0,5	2																													
iteració 1	0,5	1,25																													
iteració 2	0,5	0,875																													
iteració 3	0,5	0,6875																													
iteració 4	0,5	0,59375																													
iteració 5	0,546875	0,59375																													
iteració 6	0,546875	0,5703125																													
iteració 7	0,55859375	0,5703125																													
[...]																															
7. Quan $f(a) - f(b) < 0,00000001$, escriure: «La solució de l'equació és c » i aturar el programa	Després d'unes 30 iteracions, el programa escriu: «La solució de l'equació és 0,56714329»																														

Soluci3n:

- Explique por qu3 este programa es capaz de encontrar una soluci3n aproximada de la ecuaci3n $x + \ln(x) = 0$ entre los valores $a = 0,5$ y $b = 2$.

El programa implementa el **m3todo de bisecci3n**, que se fundamenta en el **Teorema de Bolzano**. Este teorema garantiza la existencia de al menos una ra3z en un intervalo $[a, b]$ si se cumplen dos condiciones:

- La funci3n $f(x)$ es continua en el intervalo $[a, b]$.
- La funci3n toma signos opuestos en los extremos del intervalo, es decir, $f(a) \cdot f(b) < 0$.

Para la funci3n $f(x) = x + \ln(x)$ y el intervalo $[0,5, 2]$:

- La funci3n es suma de una funci3n polin3mica y una logar3tmica, ambas continuas en su dominio. En el intervalo $[0,5, 2]$, la funci3n es continua.
- Evalamos los extremos: $f(0,5) = 0,5 + \ln(0,5) \approx 0,5 - 0,693 = -0,193 < 0$. $f(2) = 2 + \ln(2) \approx 2 + 0,693 = 2,693 > 0$.

Como se cumplen ambas condiciones, el Teorema de Bolzano asegura que existe al menos una ra3z en $(0,5, 2)$.

El programa funciona reduciendo sistemáticamente a la mitad el intervalo de búsqueda, asegurando en cada paso que la raíz permanece dentro del nuevo subintervalo, convergiendo así a la solución.

El programa funciona porque se cumplen las hipótesis del Teorema de

- b) Queremos aplicar este programa para encontrar las tres raíces de $f(x) = x^3 - 3x^2 + 1$ con valores de a y b diferentes. Encuentre justificadamente entre qué valores a y b , para cada raíz, hemos de aplicar el programa para encontrar aproximaciones de cada una de las tres raíces de la función.

Necesitamos encontrar tres intervalos $[a, b]$ para la función $f(x) = x^3 - 3x^2 + 1$ donde $f(a) \cdot f(b) < 0$. La función es un polinomio, por lo que es continua en todo $\mathbb{R}$. Evaluamos la función en varios puntos enteros para detectar cambios de signo:

- $f(-1) = (-1)^3 - 3(-1)^2 + 1 = -1 - 3 + 1 = -3 < 0$.
- $f(0) = 0 - 0 + 1 = 1 > 0$.
- $f(1) = 1 - 3 + 1 = -1 < 0$.
- $f(2) = 8 - 3(4) + 1 = 8 - 12 + 1 = -3 < 0$.
- $f(3) = 27 - 3(9) + 1 = 27 - 27 + 1 = 1 > 0$.

Observamos tres cambios de signo, que nos proporcionan los intervalos para las tres raíces:

1. Entre $x = -1$ y $x = 0$, la función pasa de negativo a positivo. **Intervalo 1:** $[-1, 0]$.
2. Entre $x = 0$ y $x = 1$, la función pasa de positivo a negativo. **Intervalo 2:** $[0, 1]$.
3. Entre $x = 2$ y $x = 3$, la función pasa de negativo a positivo. **Intervalo 3:** $[2, 3]$.

Los intervalos para encontrar las tres raíces son $[-1, 0]$, $[0, 1]$ y $[2, 3]$.